Concours ES - Epreuve de Mathématiques Générales
Durée 3 heures

Portables, calculatrices et documents interdits

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités séparément.

Un soin particulier devra être apporté à la justification des réponses et il sera apprécié dans la notation.

Exercice 1 Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \max(\ln(1+x^2), 1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(1+x^2) \geq 1$.
2. En déduire la forme de la fonction f.
3. Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^2 f(x)dx$.

Exercice 2 Soit A une matrice $\mathcal{M}_{3\times 3}$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Calculer $A^3 - A$.
3. En déduire que A est inversible.
4. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3 Soit le réel $\lambda > 0$. On note $P(X)$ le polynôme $P(X) = X^3 - 3X + \lambda$.

1. Rappeler la définition d'une racine double pour un polynôme $P(X)$.
2. Déterminer pour quel(s) λ le polynôme $P(X)$ a une racine double.
3. Quelle est la valeur de la racine double ?
4. Quelle est la troisième racine ?

Exercice 4 Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 = 1$.

1. Rappeler les racines cubiques de l'unité.
2. Notons j_1, j_2, j_3 les racines trouvées à la question précédente. Trouver j_l^2 pour toute valeur de $l \in \{1, 2, 3\}$.
3. Rappeler la valeur de i^2.
4. En déduire $(j_l)^n$ (avec $l \in \{1, 2, 3\}$) pour n de la forme $n = 3k$, $n = 3k+1$ et $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}$.
5. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$.

Exercice 5 Soient u_0, a et b trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque $a = 1$? Lorsque que $b = 0$ et $a \neq 1$?
2. Exprimer u_n dans les deux cas particuliers de la question précédente.
3. Dans le cas général, calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de u_0, a et b.
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par :
$$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
5. On suppose que $a \neq 1$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$
6. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}.$$
7. On suppose dans cette question que $a > 1$ et que $au_0 + b > u_0$. Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $+\infty$.
8. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et que sa limite ne dépend pas de u_0.

Exercice 6 Soit la fonction $v : [0, 10] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{C}^1([0, 10]) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ solution de l'équation suivante :
$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + max_{a\in\mathbb{R}}\left[-\frac{\partial v}{\partial x}(t, x)(x + 2a) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)\frac{a^2}{2}\right] = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, 10] \times \mathbb{R} \qquad (1)$$
$$v(10, x) = x^2 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

On cherche une solution de de la forme
$$v(t, x) = \gamma(t)x^2 + \varphi(t)x + \rho(t), \qquad (3)$$
où $\gamma : [0, 10] \to \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi,\ \rho : [0, 10] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables à déterminer.

1. Calculer Les dérivées $\frac{\partial v}{\partial t}(t, x)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(t, x)$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)$ en fonction de x et des fonctions γ, φ et ρ.
2. En utilisant la relation (2), trouver les conditions terminales $\gamma(10), \varphi(10)$ et $\rho(10)$.
3. Que devient l'équation (1) si on remplace la fonction v par (3) ?
4. Rappeler ou retrouver le maximum d'une fonction $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + c$ où $\alpha < 0$ et $\beta, c \in \mathbb{R}$.
5. En déduire le maximum de la fonction $a \mapsto -\frac{\partial v}{\partial x}(t, x)(x + 2a) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)\frac{a^2}{2}$, où $\frac{\partial v}{\partial x}(t, x)$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)$ sont les dérivées trouvées au premier point. Que devient l'équation (1) ?
6. Trouver les équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions γ et φ.
7. Quelle est la solution de l'équation aux dérivées partielles : $y'(t) + \alpha y(t) = 0$, $y(0) = \beta$ avec $t \in [0, T]$. Même question pour l'équation aux dérivées partielles : $y'(t) + \alpha y(t) = 0$, $y(T) = \beta$ avec $t \in [0, T]$.
8. Calculer les solutions γ et φ des équations trouvées au point 6.
9. Calculer la fonction ρ.
10. En déduire la fonction v.

Concours ES - Epreuve de Probabilités
Durée 3 heures

Portables, calculatrices et documents interdits

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités séparément.

Un soin particulier devra être apporté à la justification des réponses et il sera apprécié dans la notation.

Exercice 1 On jette deux dés équilibrés. On note S la somme des deux résultats obtenus.

1. Quelles sont les valeurs possibles de S ?
2. Donner la loi de S.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6 sachant que la somme des deux est $S = i$ avec $i = 2, 3, 4, ..., 12$.

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires. Pour tout n la densité de la variable aléatoire X_n est :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(2 + \frac{1}{n}\right) e^{-(2+1/n)x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n \leq 0)$.
2. Rappeler la définition de la convergence en loi.
3. Montrer que $X_n \xrightarrow{Loi} Y$ (X_n converge en loi vers une variable aléatoire Y) où l'on précisera la loi de Y.
4. Soit $Y_1, ..., Y_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant la même loi que Y et posons $Z_n = n^{-1/2} \max(e^{Y_1}, ..., e^{Y_n})$. Déterminer la limite en loi de Z_n.

Exercice 3 On suppose que le couple aléatoire $(X_1 \quad X_2)$ est à valeurs dans $[0, 1]^2$ et a la densité de probabilité :

$$f(x_1, x_2) = K(x_1 + 1)(x_2 + 1).$$

1. Rappeler les propriétés d'une densité de probabilité.
2. Calculer la valeur de K.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2^2 | X_2)$.

Exercice 4 Soit Σ une matrice $\mathcal{M}_{2\times 2}$ définie par $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $|\rho| < 1$.

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique.
2. Rappeler la définition d'une matrice définie positive.
3. Justifier l'existence d'un vecteur gaussien $X = (X_1 \quad X_2)^t$ de moyenne nulle et de variance Σ (où X^t représente la transposée d'un vecteur X).
4. On pose $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ et $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$.

(a) Ecrire le vecteur $Y = (Y_1\ Y_2)^t$ sous la forme $Y = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

(b) Montrer que le vecteur Y est gaussien et préciser sa matrice de variance-covariance.

(c) Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

(d) Montrer que la matrice de variance-covariance de Y est inversible.

(e) Donner l'expression de la densité du vecteur Y, notée $f_Y(y_1, y_2)$, en fonction de ρ.

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. La variable X est absolument continue et a la densité

$$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)},$$

avec $a > 0$. La loi de X est appelée loi de Cauchy de paramètre a.

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la variable $|X|^\alpha$ est-elle intégrable ?
3. Montrer que $Y = \frac{X}{a}$ est une variable aléatoire de loi Cauchy de paramètre 1.

Université Claude Bernard Lyon 1 – ISFA
Concours d'entrée en Master Econométrie et Statistiques

Epreuve de Microéconomie
Durée 3 heures
Portables, calculatrices et documents interdits
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités séparément

Exercice 1 :

Un consommateur dispose de *T* heures qu'il peut librement affecter soit au travail *(L)* soit au loisir *(Lo)*. Au-delà de son revenu salarial issu de son offre de travail, ce consommateur reçoit un revenu supplémentaire *Y* sous forme de distribution de coupons d'obligations. Le revenu de ce consommateur est consacré, outre à ses activités de loisir, à la consommation du bien *1* dont les quantités sont notées x_1 et le prix p_1 . Le taux de salaire horaire est noté *w*. Sa fonction d'utilité s'écrit :

$$u(x_1, L) = 2.x_1^2.(T - L)^2 \; avec \; L < T$$

1. Déterminez l'expression du taux marginal de substitution entre x_1 et *L*.
2. Ecrivez la contrainte budgétaire du consommateur.
3. Déterminez la fonction de demande du bien *1*, la fonction d'offre de travail et la fonction de demande de loisir. Commentez les résultats obtenus.

Exercice 2 :

L'offre du marché des produits chimiques à usage domestique est assurée par un duopole. Les fonctions de coût de long terme de ces deux firmes (notées *j = 1, 2*) s'écrivent :

$$C_j(y_j) = y_j^2 \; avec \; y_j \; la \; production \; de \; la \; firme \; j$$
$$Soit \; la \; fonction \; de \; prix \; (du \; marché) \; p = 20 - Y \; \; avec \; Y = \; y_1 + y_2$$

1. Déterminez l'équilibre de Cournot-Nash qui pourrait s'instaurer sur ce marché (on précisera les quantités vendues, le prix et les niveaux de profit et le taux de marge de chaque firme).
2. Déterminez l'équilibre coopératif de type « cartel » qui pourrait s'instaurer si les deux firmes réalisent une entente avec une règle de partage du profit (on précisera les quantités vendues, le prix, les niveaux de profit et les taux de marge).

Exercice 3 :

Dans une économie d'échange, les ressources en biens *X* et *Y* sont initialement réparties de la manière suivante entre deux consommateurs notés *1* et *2* :

$$(w_{1x}, w_{1y}) = \; (4,2) \; \; et \; \; (w_{2x}, w_{2y}) = \; (2,4)$$

Les prix des biens sont notés p_x et p_y.

Les préférences des consommateurs sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U_1(x_1, y_1) = ln \, x_1 + \; ln \, y_1 \; \; et \; \; U_2(x_2, y_2) = \sqrt{x_2}.\sqrt{y_2}$$

1. Déterminez l'équilibre concurrentiel de cette économie d'échange. Cet équilibre est il un optimum de Pareto ?
2. Lors des élections présidentielles, les programmes des deux candidats présents au deuxième tour, s'opposent sur leurs critères de justice sociale, identifiables par deux optima de Pareto différents vers lesquels ils souhaitaient orienter la collectivité. A l'issue du vote, le critère majoritairement accepté par la collectivité correspond à l'allocation Pareto – optimale suivante :

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \; (2,2) \; \; et \; (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \; (4,4)$$

a) Cette allocation appartient-elle au cœur de l'économie d'échange ?
b) Que doit mettre en œuvre le candidat élu pour respecter le choix démocratique des électeurs, sans affecter les préférences des consommateurs et les mécanismes de marché ?

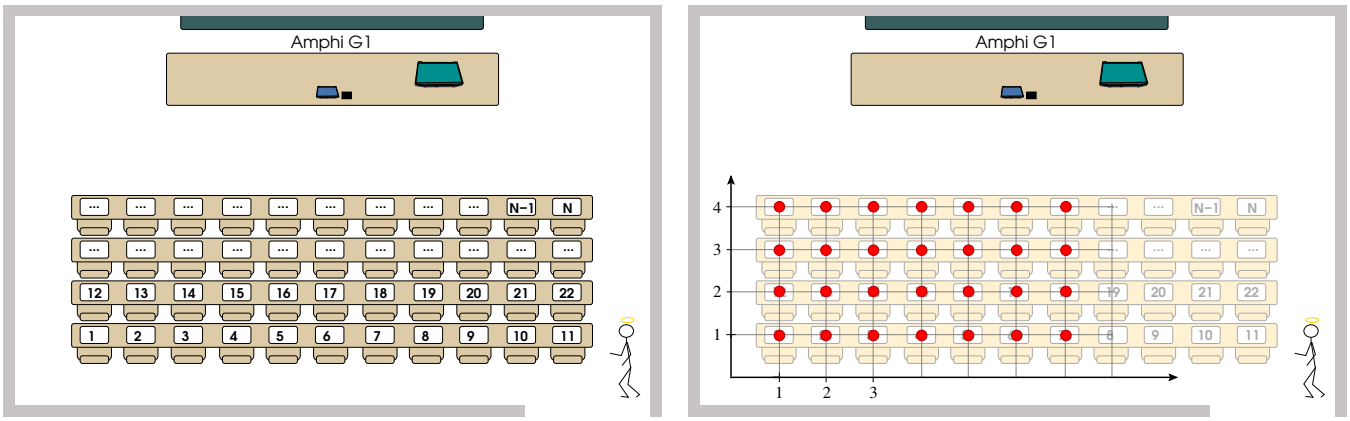
Concours d'entrée
Épreuve d'informatique

Durée : 3 heures
Tous dispositifs électroniques, calculatrices et documents interdits

Pseudo-code :
A plusieurs reprises dans ce sujet, il vous est demandé de décrire un traitement informatique à l'aide de pseudo-code, c'est à dire en décrivant les opérations de ce programme, cette description étant basée sur un mélange de langage naturel et de structures de contrôle classiques (instructions conditionnelles, boucles, etc). Des exemples sont donnés page 4.

Placement optimal

Nous nous intéressons au placement d'un ensemble de n candidats dans un amphithéâtre de N places, avec $n \leq N$. Les places sont numérotées de 1 à N. Pour faciliter notre réflexion, nous nous appuierons sur le cas représenté par la figure 1(a).



(a) Places disponibles (b) Repère

FIGURE 1 – Places disponibles

La disposition des places est faite sur un maillage régulier, comme illustré sur la figure 1(b). Nous considérerons que la distance entre deux candidats peut être assimilée à la distance entre les deux pastilles rouges localisées à leurs emplacements. Plus précisément, ces pastilles sont centrées sur des points de coordonnées entières et c'est la distance entre leurs centres qui sera calculée. Ainsi, en notant $d_{i,j}$ la distance séparant les places i et j et en considérant notre exemple, nous avons $d_{1,2} = 1$, $d_{1,13} = \sqrt{2}$ et $d_{1,38} = 5$.

Q.1 Supposons que l'amphithéâtre comporte P places par rang et R rangs. Sur la figure 1(a), la place 14 est la 3e place du 2e rang. Proposez un pseudo-code permettant de décrire une fonction `pos()` prenant en argument le numéro d'une place ainsi que le nombre de places par rang et fournissant en sortie un vecteur dont la premiere valeur sera le numéro du rang et la seconde valeur sera le numéro de la place dans ce rang.

Q.2 Proposez un pseudo-code permettant de décrire une fonction `dist()` prenant en arguments les numéros de deux places ainsi que P et fournissant la distance entre ces deux places.

Q.3 Proposez un pseudo-code permettant de construire un vecteur $E[\,]$ contenant toutes les valeurs distinctes $d_{i,j}$, pour $i \neq j$, par ordre croissant.

Le nombre de candidats étant plus petit que le nombre de places disponibles, il revient aux organisateurs du concours de placer les étudiants dans l'amphithéâtre, i.e de choisir les n places qui seront occupées. Associons à la i^e place la variable binaire x_i qui a pour valeur 1 si la place est occupée et 0 sinon. Le choix des valeurs pour ces variables doit satisfaire la contrainte (1) :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = n \tag{1}$$

Les organisateurs souhaitent faire en sorte que les candidats soient séparés par la plus grande distance envisageable. Autrement dit, étant donnée une place occupée, la place occupée la plus proche doit être aussi éloignée que possible. Explicitons cela par étape afin d'aboutir à une formulation de la fonction à maximiser.

Si un candidat est assis à la i^{e} place, son plus proche voisin est à la distance donnée par (2) :

$$\min_{j \neq i \,:\, x_j = 1} d_{i,j} \tag{2}$$

Le plus petit écart entre deux candidats est donné par la grandeur (3) :

$$\min_{i \,:\, x_i = 1} \quad \min_{j \neq i \,:\, x_j = 1} d_{i,j} \tag{3}$$

Q.4 Montrer que cette quantité s'écrit $\min\limits_{\substack{i \neq j \\ x_i x_j = 1}} d_{i,j}$.

Ainsi, le problème que les organisateurs ont a résoudre est le suivant :

$$\max \quad \min_{\substack{i \neq j \\ x_i x_j = 1}} d_{i,j} \text{ sous les contraintes } \begin{cases} \sum_i x_i = n \\ \forall i,\ x_i \in \{0,1\} \end{cases} \tag{4}$$

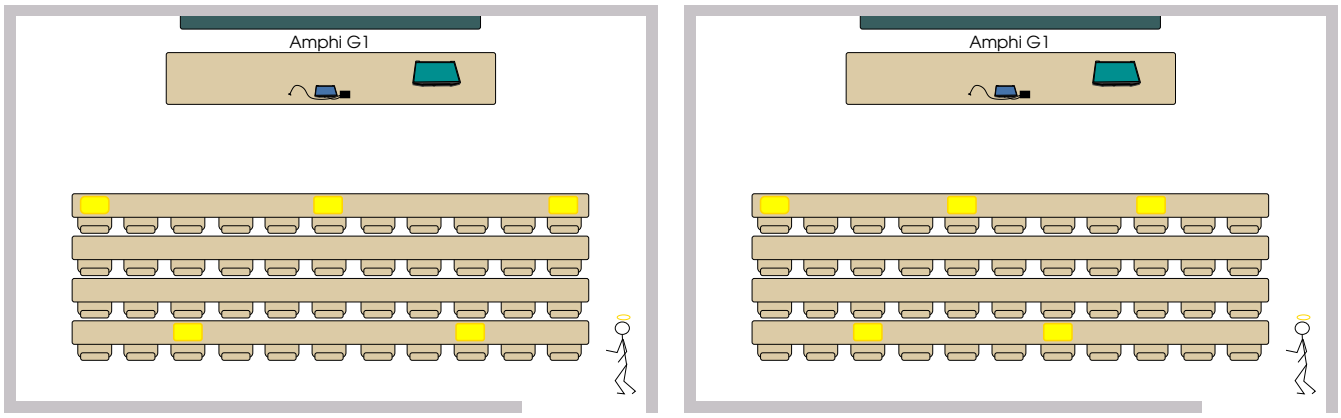
Q.5 Exprimez le nombre de solutions satisfaisant le système de contraintes en fonction du nombre de places et du nombre de candidats.

Q.6 Supposez que l'on dispose d'un super-calculateur capable de réaliser un milliard de milliards d'opérations à la seconde. Poussons l'hypothèse jusqu'à considérer que cette opération consiste en l'énumération d'une des solutions à notre système de contraintes. Donnez un ordre de grandeur du temps nécessaire à l'énumération de toutes les solutions lorsque $N = 230$ et $n = 40$.

Q.7 Pour une valeur de n donnée, existe-t-il toujours une solution optimale au problème (4) ?

Un des organisateurs ne semble pas satisfait par cette formalisation et met en avant les deux exemples de la figure 2.

Q.8 Pour chaque exemple, calculez la valeur de la fonction objectif. Pour cela, vous tiendrez compte de l'échelle indiquée sur la figure 1(b).



(a) Essai 1 (b) Essai 2

FIGURE 2 – Solutions de placement pour 5 candidats dans un amphi de 44 places

La solution 2(a) semble, d'un point de vue global, meilleure pour maximiser les écarts entre les candidats. Parmi les solutions ex-æquo selon la fonction maximisée, il pourrait être intéressant de favoriser celle(s) maximisant la quantité (5) :

$$\sum_i \sum_{j \neq i} x_i x_j d_{i,j} \tag{5}$$

Q.9 Pour chacune des solutions de la figure 2, évaluez la quantité (5).

Les organisateurs sont d'accord pour chercher, parmi les solutions optimales du problème (4), celles maximisant la quantité (5). Le problème est à présent de trouver d'une part les solutions optimales du problème (4), et d'autre part d'identifier parmi celles-ci une qui maximise la quantité (5).

Nous pouvons remarquer que la valeur optimale est nécessairement une des valeurs contenues dans $E[\,]$. Notons e^* cette valeur et soit k^* l'indice tel que $E[k^*] = e^*$. Nous avons donc :

$$\min_{\substack{i \neq j \\ x_i x_j = 1}} d_{i,j} = e^*$$

Par ailleurs, soit x^* une solution de placement correspondant à e^* et notons x_i^* les valeurs associées à x^*.

Q.10 Montrez que pour deux indices i et j différents, si $x_i^* x_j^* = 1$, alors $d_{i,j} \geq e^*$.

Q.11 Montrez que pour deux indices i et j différents, si $d_{i,j} < e^*$, alors $x_i^* + x_j^* \leq 1$.

Ainsi, x^* est solution du système :

$$\begin{cases} \sum_i x_i = n \\ \forall (i,j) \in U_{k^*}, x_i + x_j \leq 1 \quad \text{avec } U_{k^*} = \{(i,j) | i \neq j, d_{i,j} < E[k^*]\} \\ \forall i,\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

Posons, pour $k \in [1\ ..\ Taille(E[\,])]$:

$$(C_k) : \begin{cases} \sum_i x_i = n \\ \forall (i,j) \in U_k, x_i + x_j \leq 1 \quad \text{avec } U_k = \{(i,j) | i \neq j, d_{i,j} < E[k]\} \\ \forall i,\ x_i \in \{0,1\} \end{cases} \tag{6}$$

Q.12 Montrez que k^* est le plus grand indice pour lequel (C_k) admet des solutions.

Q.13 Supposons que nous disposions d'une fonction `Compat()` qui prend en argument un système de contraintes et qui fournit en sortie un booléen valant `vrai` si le système est compatible (c-à-d admet des solutions) ou `faux` sinon. Proposez un pseudo-code permettant de chercher la valeur optimale contenue dans $E[\,]$. Cette recherche reposera sur un procédé dichotomique.

Introduisons quelques notations qui seront utilisées pour la recherche de solutions à notre problème :

- Soit $X[\,]$ un vecteur de n éléments pouvant chacun prendre les valeurs `0`, `1` ou `L`. Ce vecteur sera utilisé comme support à la recherche des valeurs des x_i, la valeur `L` étant donnée à $X[i]$ si aucune valeur n'a encore été fixée pour x_i. La valeur initiale de $X[\,]$ sera fixée en donnant à chaque élément la valeur `L`.
- Soit $C[\,]$ un tableau comportant trois colonnes, ind_1, ind_2 et $ordre$. Ce tableau servira à référencer les contraintes de type $x_i + x_j \leq 1$ et à indiquer si elles ont été exploitées pour la recherche en cours de solution. On notera $C[k]$ (resp. $C.ind_1[k]$, $C.ind_2[k]$ ou $C.ordre[k]$) les éléments de la k^{e} ligne (resp. le k^{e} élément de la colonne en question). Ainsi, les éléments de la k^{e} ligne de C indiqueront que la contrainte

  $$x_{C.ind_1[k]} + x_{C.ind_2[k]} \leq 1$$

  existe. L'élément $C.ordre[k]$ sera initialisé à 0.
- Soit $Cont$ une variable booléenne.
- Soit P_{ind} une pile de valeurs d'indice.
- Soit P_{ordre} une pile de valeurs de $C.ordre$.
- Soit P_X une pile de vecteurs $X[\,]$.

Par ailleurs, nous utiliserons les procédures [1] `empile()` et `depile()` définies comme suit :

- `empile(Px, x)` place au sommet de la pile `Px` l'objet `x` ;
- `depile(Px, x)` place dans `x` l'objet situé en haut de `Px` en le retirant de la pile ou place `vide` dans `x` si `Px` est vide.

1. Il est classique de différencier fonction et procédure comme suit : une fonction est un traitement qui renvoie un objet et qui ne modifie pas les arguments qu'il reçoit, tandis qu'une procédure désigne un traitement qui ne renvoie rien et qui peut modifier la valeur de ses arguments. C'est en ce sens que `empile` et `depile` sont bien des procédures.

Q.14 Proposez un pseudo-code permettant d'initialiser le tableau $C[\,]$ correspondant à toutes les contraintes du type $x_i + x_j \leq 1$ du système (C_k).

Nous considérons à présent la procédure `MAJ` qui reçoit en arguments le tableau $C[\,]$, le vecteur $X[\,]$, un indice i et une valeur `val` pour x_i et un entier n correspondant au nombre de candidats. Elle est décrite par le pseudo-code ci-dessous :

```
MAJ(C,X,i,val,n) {
  Si X[i]==L
  Alors X[i]<-val
  Sinon
    Si X[i]<>val
    Alors
      Cont<-FAUX
      Sortir de la procédure

  Si val==0
  Alors
    Pour chaque k tel que C.ordre[k]==0 ET (C.ind1[k]==i OU C.ind2[k]==i)
    Faire C.ordre[k]<-max(C.ordre)+1
  Sinon
    Tant qu'il reste k tel que C.ordre[k]==0 ET (C.ind1[k]==i OU C.ind2[k]==i)
    Faire
      j<-C.ind2[k]
      Si j==i, Alors j<-C.ind1[k]
      MAJ(C,X,j,0,n)
      Si Cont==Faux, Alors Sortir de la procedure

  Si (Nb de 1 dans X[])+(Nb de L dans X[]) >= n
  Alors Cont<-VRAI
  Sinon Cont<-FAUX
}
```

Le tableau C et le vecteur X étant initialisés et n étant fixé au nombre de candidats à placer, le pseudo-code suivant utilise la procédure `MAJ` pour déterminer si des solutions existent pour C :

```
Cont<-VRAI
Tant que Cont ET min(C.ordre)==0
Faire
  Identifier le plus petit i tel que X[i]==L et C.ordre[i]==0
  empile(P_ind,i)
  empile(P_ordre,max(C.ordre))
  empile(P_X,X)
  MAJ(C,X,i,1,n)
  Si Non Cont
  Alors
    depile(P_ind,i)
    depile(P_ordre,max)
    depile(P_X,X)
    Pour chaque k tel que C.ordre[k]>max, Faire C.ordre[k]<-0
    MAJ(C,X,i,0,n)

Si Cont, Alors il existe des solutions, Sinon il n'y a pas de solution
```

Considérons le cas illustré page 5 : neuf places sont réparties en trois rangs de trois places. Nous cherchons ici à placer trois candidats. La matrice de distance entre les places peut être résumée par la matrice diagonale supérieure donnée par (7).

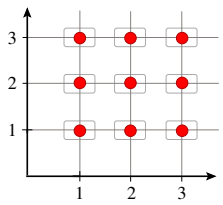


FIGURE 3 - Cas simple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} & 2 & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \\ & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} & 2 & \sqrt{5} \\ & & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} & 1 & 2\sqrt{2} & \sqrt{5} & 2 \\ & & & 0 & 1 & 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \\ & & & & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ & & & & & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} & 1 \\ & & & & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Q.15 Réalisez l'initialisation du tableau $C[\ ]$ correspondant aux contraintes du type $x_i + x_j \leq 1$ du système (C_3) associé à notre exemple. Vous pourrez utiliser la table (1) pour renseigner les deux premières colonnes- et la prolonger si besoin sur votre copie. La troisième colonne pourra être utilisée plus loin, pour la recherche de solution, à l'aide d'un crayon gris.

Q.16 Appliquez le pseudo-code décrit page 4 au tableau construit à la question précédente afin de déterminer si des solutions existent. Vous détaillerez l'utilisation des trois piles - l'opération de dépilage sera signalée en rayant la valeur dépilée. Vous pourrez utiliser la table (2) et la prolonger sur votre copie si besoin. Par ailleurs, vous pourrez en sus tirer bénéfice d'une représentation reposant sur un arbre binaire pour illustrer les solutions envisagées au cours du traitement.

Ce qui précède montre qu'il est tout à fait envisageable d'automatiser la détermination de la valeur optimale du problème (4) et la recherche de solutions optimales. Passons à présent à la recherche de solution au problème suivant :

$$\max \sum_i \sum_{j \neq i} x_i x_j d_{i,j} \quad \text{s.c.} \quad (x_i) \in (C_{k^*}) \tag{8}$$

La méthode Faure et Malgrange est adaptée à la résolution de programmes linéaires sur variables binaires. Le principe de cette méthode est simple :

- déterminer une solution réalisable x_{tmp},
- calculer la valeur associée de la fonction v_{tmp},
- ajouter aux contraintes la contrainte que la fonction objectif devra être supérieure ou égale à $v_{tmp} + 1$,
- recommencer avec le nouveau système de contraintes jusqu'à ce que le système devienne incompatible.

Ajoutons que Faure et Malgrange conseillent de positionner à 1 en priorité les termes correspondant aux scalaires les plus forts de la fonction objectif, ceci afin d'accélérer la recherche. Cette présentation est incomplète mais suffisante pour permettre une adaption pour la résolution du problème (8).

Q.17 Montrez que la fonction du problème (8) s'écrit

$$\sum_{(i,j) \in U_{k^*}} x_i x_j d_{i,j}$$

Q.18 Donnez l'expression de cette fonction pour l'exemple considéré en **Q.15** et **Q.16**.

Q.19 Appliquez les principes de la méthode de Faure et Malgrange à la résolution de notre exemple.

Q.20 Proposez, sous forme de pseudo-code, une adaptation du traitement proposé en page 4 afin de permettre la mise en œuvre de la résolution du problème (8).

TABLE 1 - tableau C

$C.ind_1$	$C.ind_2$	$C.ordre$

TABLE 2 - Piles

	0	L	L	L	L	L	L	L	L	L
P_{ind}	P_{ordre}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
		P_X								